

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПЛОСКОМ ДВУХСЛОЙНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ¹

Аннотация. Рассматривается распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейном плоском двухслойном диэлектрическом волноводе. Диэлектрическая проницаемость в слоях описывается законом Керра. Слои расположены между двумя изотропными немагнитными полубесконечными средами с постоянными электродинамическими параметрами. Получено дисперсионное уравнение для собственных значений задачи (постоянных распространения).

Ключевые слова: задача сопряжения для обыкновенных дифференциальных уравнений в многосвязной области, нелинейность Керра, дисперсионное уравнение.

Abstract. The article considers electromagnetic TE-wave propagation in a two-layered dielectric waveguide. Permittivities inside the layers are described by Kerr law. The layers are located between two semi-infinite spaces with constant permittivities. The author derives a dispersion equation for eigenvalues (propagation constants) of the problem.

Key words: conjugation problem for ordinary differential equations in multiply-connected domain, Kerr nonlinearity, dispersion equation.

Введение

Данная работа продолжает исследования [1–4]. Здесь рассматривается задача о распространении ТЕ-волн в плоском двухслойном диэлектрическом волноводе. Волновод помещен между двумя полубесконечными средами с постоянными электродинамическими параметрами. Диэлектрическая проницаемость в каждом из двух слоев зависит от электрического поля по закону Керра: $\varepsilon = \varepsilon_{\text{const}} + \alpha|\mathbf{E}|^2$, где $\varepsilon_{\text{const}}$ – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости, α – коэффициент нелинейности. Задача сводится к отысканию постоянных распространения электромагнитной волны в рассматриваемой волноведущей структуре. Постоянные распространения являются корнями дисперсионного уравнения, которое представляется основным результатом рассматриваемой работы. Для вывода дисперсионного уравнения используется теория эллиптических функций. Рассматриваемый в этой работе подход позволяет изучать нелинейность вида $\varepsilon = \varepsilon_{\text{const}} + \alpha|\mathbf{E}|^2 + \beta|\mathbf{E}|^4$, где $\varepsilon_{\text{const}}$ – постоянная составляющая диэлектрической проницаемости; α , β – коэффициенты нелинейности. Работа [5] (где также используется подход на основе эллиптических функций) тесно связана с рассматриваемой в этой статье задачей. Полученное дисперсионное уравнение позволяет изучать как обычные нелинейные материалы, так и нелинейные метаматериалы. Важ-

¹ Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (№ МК-2074.2011.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-07-00330-А).

ность найденного дисперсионного уравнения определяется, по крайней мере, двумя обстоятельствами: 1) полученное дисперсионное уравнение является точным (получено без упрощающих предположений в рамках модели керровской нелинейности) и может быть выписано для большего числа слоев. Такая многослойная структура может рассматриваться как одномерный фотонный кристалл [6]. Фотонные кристаллы в настоящее время привлекают большое внимание исследователей (см., например, [6, 7]); 2) полученное дисперсионное уравнение может быть использовано для построения и тестирования численных методов решения рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим электромагнитные волны, проходящие через два однородных, изотропных, немагнитных диэлектрических слоя. Диэлектрическая проницаемость в слоях зависит от электрического поля по закону Керра. Слои расположены между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$ и $h = h_1 + h_2$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянные диэлектрические проницаемости ϵ_1 и ϵ_4 соответственно (ϵ_1 и ϵ_4 – произвольные действительные постоянные). Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Предполагаем гармоническую зависимость полей от времени в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \mathbf{E}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}_-(x, y, z) \sin \omega t;$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) = \mathbf{H}_+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}_-(x, y, z) \sin \omega t,$$

где ω – круговая частота; $\mathbf{E}_+$, $\mathbf{E}_-$, $\mathbf{H}_+$, $\mathbf{H}_-$ – вещественные искомые функции.

Образуем комплексные амплитуды полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ [8]: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + i\mathbf{E}_-$; $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + i\mathbf{H}_-$. Везде ниже множители $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ будем опускать.

Электромагнитное поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}; \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (1)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границе раздела сред $x = 0$, $x = h_1$, $x = h_1 + h_2$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$. Диэлектрическая проницаемость внутри слоя имеет вид $\epsilon = \epsilon_i + \alpha_i |\mathbf{E}|^2$, где $i = 2, 3$ и ϵ_i , α_i – произвольные постоянные. Будем искать решение уравнений Максвелла во всем пространстве.

На рис. 1 показана геометрия задачи.

Рассмотрим ТЕ-поляризованные волны $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)^T$, $\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)^T$,

где $(\dots)^T$ – операция транспонирования. Легко показать, что компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не зависят от переменной y . Волны, распространяющиеся вдоль границы раздела сред z , гармонически зависят от z . Тогда компоненты полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ имеют следующий вид:

$$H_y = H_y(x)e^{i\gamma z}, \quad E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}, \quad E_z = E_z(x)e^{i\gamma z}. \quad (2)$$

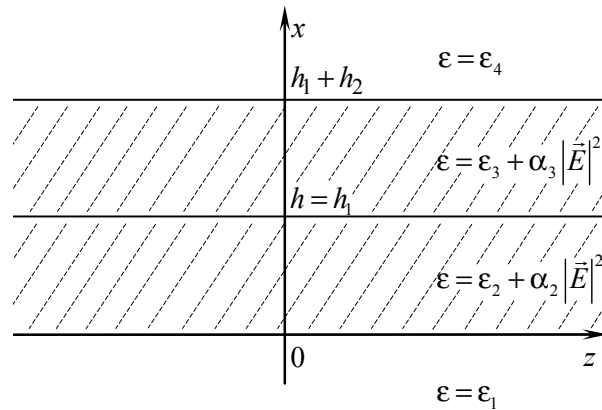


Рис. 1

Подставив компоненты (2) в уравнения Максвелла (1), выполнив нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = kx$, $\frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}$, $\tilde{\epsilon}_j = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}$ ($j = 1, 2, 3, 4$), $\tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\epsilon_0}$ ($i = 1, 2$), где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума и $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_0$ с $\mu = \mu_0$, обозначив $E_y(\tilde{x}) \equiv Y(\tilde{x})$ и опуская значок тильды, получаем уравнение

$$Y''(x) = \gamma^2 Y(x) - \epsilon Y(x), \quad (3)$$

где γ – неизвестный спектральный параметр (постоянная распространения)

Будем искать действительные решения $Y(x)$ для уравнения (3). Полагая γ действительным (так что $|E|^2$ не зависит от z) и считаем

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1, & x < 0; \\ \epsilon_2 + \alpha_2 Y^2, & 0 < x < h_1; \\ \epsilon_3 + \alpha_3 Y^2, & h_1 < x < h_1 + h_2; \\ \epsilon_4, & x > h_1 + h_2. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть функция Y дифференцируема в слое так, что

$$Y(x) \in C(-\infty; +\infty) \cap C^1(-\infty; \infty) \cap \\ \cap C^2(-\infty; 0) \cap C^2(0; h_1) \cap C^2(h_1; h) \cap C^2(h; +\infty). \quad (5)$$

2. Решение системы дифференциальных уравнений

Для $x < 0$, $\epsilon = \epsilon_1$ из (3) и (4) в силу условия на бесконечности получаем решение

$$Y(x) = A \exp\left(x\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1}\right). \quad (6)$$

Для $x > h$, $\varepsilon = \varepsilon_4$ из (3) и (4) в силу условия на бесконечности получаем решение

$$Y(x) = B \exp\left(-(x - h_1 + h_2)\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_4}\right). \quad (7)$$

В формулах (6) и (7) постоянные A и B определяются начальными условиями и условиями сопряжения.

Внутри слоя $0 < x < h_1$ уравнение (3) принимает вид

$$Y''(x) = (\gamma^2 - \varepsilon_2 - \alpha_2 Y^2(x)) Y(x). \quad (8)$$

Это уравнение интегрируется в эллиптических функциях (см. [9]¹). Из (8) получаем

$$(Y')^2 = (\gamma^2 - \varepsilon_2) Y^2 - \frac{\alpha_2}{2} Y^4 + C_2, \quad Y^2(x) = \frac{2}{3\alpha_2} \left(\gamma^2 - \varepsilon_2 - 3\wp_2(x + C_{22}) \right), \quad (9)$$

где $\wp(x)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, ее инварианты имеют вид

$$g_2 = \frac{2}{3} \left(3\alpha_2 C_2 + 2(\gamma^2 - \varepsilon_2)^2 \right) \text{ и } g_3 = -\frac{2}{3} \alpha_2 (\gamma^2 - \varepsilon_2) C_2 - \frac{8}{27} (\gamma^2 - \varepsilon_2)^3;$$

C_2 и C_{22} – постоянные интегрирования.

Внутри слоя $h_1 < x < h_1 + h_2$ получаем по аналогии с предыдущим

$$(Y')^2 = (\gamma^2 - \varepsilon_3) Y^2 - \frac{\alpha_3}{2} Y^4 + C_3 \text{ и } Y^2(x) = \frac{2}{3\alpha_3} \left(\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3(x + C_{33}) \right), \quad (10)$$

где

$$g_2 = \frac{2}{3} \left(3\alpha_3 C_3 + 2(\gamma^2 - \varepsilon_3)^2 \right) \text{ и } g_3 = -\frac{2}{3} \alpha_3 (\gamma^2 - \varepsilon_3) C_3 - \frac{8}{27} (\gamma^2 - \varepsilon_3)^3;$$

C_3 и C_{33} – постоянные интегрирования.

3. Граничные условия и дисперсионное уравнение

Как известно, касательные компоненты электромагнитного поля непрерывны на границах раздела сред. В нашем случае касательными компонентами являются E_y и H_z . Учитывая сказанное, получаем для функций Y и Y' следующие условия сопряжения:

$$[Y]_{x=0} = 0, \quad [Y]_{x=h_1} = 0, \quad [Y]_{x=h_1+h_2} = 0,$$

¹ Все результаты теории эллиптических функций, используемые здесь, можно найти в [9].

$$[Y']_{x=0} = 0, [Y']_{x=h_1} = 0, [Y']_{x=h_1+h_2} = 0, \quad (11)$$

где $[f]_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$.

Пусть $Y_0 := Y(0)$, $Y_h := Y(h)$ и постоянная Y_h считается известной, тогда $B = Y_h$, $A = Y_0$. Далее, используя (6), (7), получаем

$$Y'(h) = -\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_4} Y_h, \quad Y'(0) = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_1} Y_0. \quad (12)$$

Будем последовательно использовать условия сопряжения (11) на каждой границе раздела. Получаем:

$$Y_0^2 = \frac{2}{3\alpha_2} (\gamma^2 - \varepsilon_2 - 3\wp_2(C_{22})), \quad (13a)$$

$$\frac{1}{\alpha_2} (\gamma^2 - \varepsilon_2 - 3\wp_2(h_1 + C_{22})) = \frac{1}{\alpha_3} (\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3(h_1 + C_{33})), \quad (13б)$$

$$Y_h^2 = \frac{2}{3\alpha_3} (\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3(h_1 + h_2 + C_{33})), \quad (13в)$$

$$(\gamma^2 - \varepsilon_1) Y_0^2 = (\gamma^2 - \varepsilon_2) Y_0^2 - \frac{\alpha_2}{2} Y_0^4 + C_2, \quad (13г)$$

$$(\gamma^2 - \varepsilon_2) Y_{h_1}^2 - \frac{\alpha_2}{2} Y_{h_1}^4 + C_2 = (\gamma^2 - \varepsilon_3) Y_{h_1}^2 - \frac{\alpha_3}{2} Y_{h_1}^4 + C_3, \quad (13д)$$

$$(\gamma^2 - \varepsilon_4) Y_h^2 = (\gamma^2 - \varepsilon_3) Y_h^2 - \frac{\alpha_3}{2} Y_h^4 + C_3. \quad (13е)$$

Величину Y_{h_1} можно выразить из уравнения (9) (или (10)), получаем

$$Y_{h_1}^2 = \frac{2}{3\alpha_3} (\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3(h_1 + C_{33})).$$

Система (13) состоит из шести уравнений и пяти неизвестных Y_0 , C_2 , C_{22} , C_3 , C_{33} (мы учитываем, что Y_{h_1} выражается через C_{33}). Пять уравнений этой системы позволят найти пять неизвестных, а шестое даст дисперсионное уравнение. Найдем его. Из уравнений (13г) и (13е) найдем

$$C_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) Y_0^2 + \frac{\alpha_2}{2} Y_0^4, \quad (14a)$$

$$C_3 = (\varepsilon_3 - \varepsilon_4) Y_h^2 + \frac{\alpha_3}{2} Y_h^4. \quad (14б)$$

Учитывая четность функции Вейерштрасса, из уравнений (13a) и (13в) найдем

$$C_{22} = \pm \wp_2^{-1}(\sigma_2) + T_2 n_2 + T_2' m_2, \quad (14в)$$

$$C_{33} = \pm \wp_3^{-1}(\sigma_3) - h_1 - h_2 + T_3 n_3 + T'_3 m_3, \quad (14г)$$

где $\sigma_2 = \frac{2(\gamma^2 - \varepsilon_2) - 3\alpha_2 Y_0^2}{6}$, $\sigma_3 = \frac{2(\gamma^2 - \varepsilon_3) - 3\alpha_3 Y_h^2}{6}$; T'_2, T''_2 – независимые периоды функции $\wp_2$; T'_3, T''_3 – независимые периоды функции $\wp_3$ (причем T_2, T_3 выбраны действительными, а T'_2, T'_3 – чисто мнимыми); $n_2, n_3, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$; знак $\wp^{-1}$ означает функцию, обратную к $\wp$ (т.е. эллиптический интеграл в нормальной форме Вейерштрасса).

Уравнения (13б) и (13д) примут вид

$$\alpha_3 \left(\gamma^2 - \varepsilon_2 - 3\wp_2 \left(\wp_2^{-1}(\sigma_2) + h_1 \right) \right) = \alpha_2 \left(\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3 \left(\wp_3^{-1}(\sigma_3) - h_2 \right) \right), \quad (14д)$$

$$\alpha_2 Y_0^4 + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) Y_0^2 + f = 0, \quad (14е)$$

где

$$f = \frac{4}{3\alpha_3} (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \left(\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3 \left(\wp_3^{-1}(\sigma_3) - h_2 \right) \right) + \\ + \frac{4}{9\alpha_3^2} (\alpha_3 - \alpha_2) \left(\gamma^2 - \varepsilon_3 - 3\wp_3 \left(\wp_3^{-1}(\sigma_3) - h_2 \right) \right)^2 - 2(\varepsilon_3 - \varepsilon_4) Y_h^2 - \alpha_3 Y_h^4.$$

Уравнение (14е) является квадратным относительно Y_0^2 . Подставляя в (14д) значение Y_0^2 (найденное из (14е)), получаем дисперсионное уравнение.

Число T определяется в зависимости от знака дискриминанта $\Delta \equiv g_2^3 - 27g_3^2$ кривой $f = 4t^3 - g_2 t - g_3$. Если $\Delta > 0$, то уравнение $f = 0$

имеет три действительных корня $e_1 > e_2 > e_3$, и $T = 2 \int_{e_1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$ (в этом

случае T – действительный период функции $\wp(x)$). Если $\Delta < 0$, уравнение

$f = 0$ имеет один действительный корень e_2 , и $T = 2 \int_{e_2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$

(в этом случае полупериоды ω_1 и ω_2 функции $\wp(x)$ являются комплексно-сопряженными числами и их сумма есть действительное число T). Число T' определяется как линейная комбинация периодов функции $\wp(x)$ так, чтобы число T' оказалось чисто мнимым.

Заключение

При изучении распространения поляризованных электромагнитных волн в слоях с диэлектрической проницаемостью, полиномиально зависящей от напряженности электрического поля, эллиптические функции удается применить только в случае ТЕ-волн и нелинейности полиномиального типа

не сложнее обобщенной керровской. Для изучения распространения поляризованных электромагнитных волн в нелинейных слоях с произвольными нелинейностями можно использовать подход на основе интегральных дисперсионных соотношений [1].

Автор благодарит Ю. Г. Смирнова за полезные обсуждения.

Список литературы

1. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2010. – 264 с.
2. **Валовик, Д. В.** Нелинейные эффекты в задаче о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 309–314.
3. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое из нелинейного метаматериала / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 5. – С. 587–599.
4. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейной среде с насыщением / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 11. – С. 1329–1335.
5. **Schurmann, H. W.** TE-polarized waves guided by a lossless nonlinear three-layer structure / H. W. Schurmann, V. S. Serov, Yu. V. Shestopalov // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 58, № 1. – P. 197.
6. **Joannopoulos, J. D.** Photonic Crystals. Molding the Flow of Light / J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, R. D. Meade. – Second Edition. – Princeton University Press, 2008. – P. 286.
7. **Lourtioz, J.-M.** Photonic Crystals. Towards Nanoscale Photonic Devices / J.-M. Lourtioz et al. – Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2005. – P. 426.
8. **Eleonskii, P. N.** Cylindrical Nonlinear Waveguides / P. N. Eleonskii, L. G. Ogan'es'yants, V. P. Silin // Soviet physics JETP. – 1972. – V. 35, № 1. – P. 44–47.
9. **Ахиезер, Н. И.** Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер. – М. : Наука, 1970. – 304 с.

Валовик Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitry Victorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

УДК 517.9, 519.6

Валовик, Д. В.

Задача сопряжения для электромагнитных ТЕ-волн, распространяющихся в плоском двухслойном нелинейном диэлектрическом волноводе / Д. В. Валовик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 2 (22). – С. 43–49.